A. Pavlović *)

O RAZDVAJANJU UTICAJA PROMENJIVIH VELIČINA NA VREDNOST ODZIVA SISTEMA

1. Uvod

U ovom radu je prikazana mogućnost dobijanja pogodnog analitičkog izraza upotrebljivog za ocenu efekta uticaja parametara sistema i za izračunavanje vrednosti izabrane veličine stanja u definisanoj tački prostora, primenom površinske metodologije. Predpostavljeni sistem je nelinearan, neautonoman, a njegov matematički model rešljiv, za sada, samo metodama numeričke analize.

2. Matematički model - Matematički model koji opisuje ponašanje realnog mašinskog sistema - izražen je u vidu vektorske diferencijalne jednačine, po pretpostavci nelinearne i nehomogene:

$$\frac{dz}{dt} = g(z,t) \tag{1}$$

Kretanje $z(t;\, z_o,\, t_0)$ sistema (1) zadovoljava početne $z(t;\, z_o) \in P_a$, $\forall t \in T$ i krajnje uslove $z(t) \in P_f$, $\forall t_f \in T_f$. Koordinata krajnje tačke - cilja $z(t_f)$ ima unapred definisanu vrednost, dok je $t_f \in T_f$ promenjivo, zavisno od vrednosti parametara sistema, u okviru skupa T_f ograničenog sa obe strane.

Sistem zavisi od velikog broja konstrukcionih parametara povezanih medjusobno. Promena bilo kog od parametara dovodi do promene vrednosti koeficijenata matematičkog modela i do promene vrednosti odziva sistema.

*) Dr Aleksandar Pavlović, dipl. ing. vanredni profesor Mašinskog Fakulteta u Nišu. Adresa: Šumadijski trg 6, Beograd.

Od interesa je da se utvrdi koji od konstrukcionih parametara ima bitan uticaj na odziv sistema i da se generiše oblik računskog algoritma izražen kroz fizičke vrednosti konstrukcionih parametara, koji bi bio pogodan za inženjersku praksu.

Upotrebljen je postupak koji se koristi u dvonivoskom faktornom eksperimentu.

Karakteristike sistema, a u ove se ubrajaju kinetička energija, veličina i težina sistema, su funkcije izbora konstrukcionih parametara. Broj ovih parametara u okviru jednog sistema je (n), a broj sistema koji mogu da se formiraju na ovaj način je (i). Parametri jednog sistema, a pod ovim se podrazumevaju konstrukcioni parametri, izraženi su kroz:

$$\{\alpha\}_i = \{\alpha_1\ \alpha_2 \ldots \alpha_n\}_i^T \qquad (2)$$

Indeks performansi sistema izražen sa J je funkcija vektora parametara (2):

$$J = L(\vec{\alpha})_i \qquad (3)$$

u okviru ograničenja postavljenih sistemu u vektorskom obliku:

$$M\ (t_f, \vec{\alpha}) \leq K \qquad (4)$$

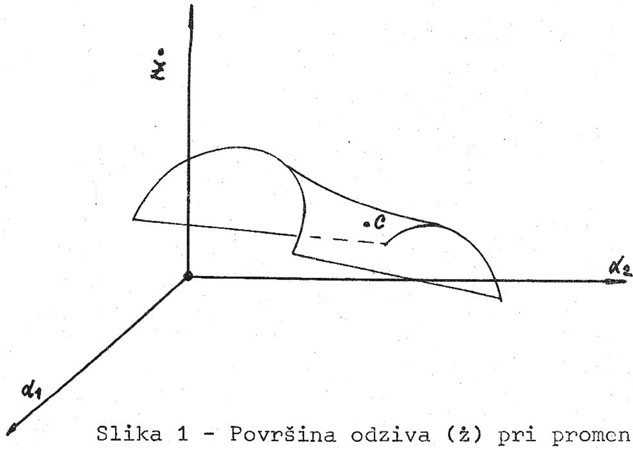
pošto je sistem i vremenski i dimenzionalno ograničen.

3. Numeričko rešenje - Numeričko rešenje jednačine (1) je po predpostavci moguće i postoji, a promenom vrednosti komponenata vektora (2) moguće je naći, nekom od pogodnih metoda, optimalnu ili optimalne vrednosti indeksa performansi (3):

$$J_{opt.} = L(\vec{\alpha}^{opt}) = \dot{z}(t_f)_{max} \equiv \text{kinet. energ.}, \qquad (5)$$

za slučaj izabran u primeru ovog rada.

Variranje vrednosti komponenata vektora (2) dovodi do formiranja optabilne površine u hiperprostoru parametara u okviru ograničenja (4): Za slučaj rasmatran u primeru, vršeći promenu dva konstrukciona parametra (α_1 i α_2) dobija se oblik površine kao na slici 1:



Slika 1 - Površina odziva (ž) pri promeni parametara α_1 i α_2

U slučaju promene više parametara površina odziva više ne može da se pretstavi grafički.

Za odredjenu vrednost parametra α_1 u okviru ograničenja, moguće je naći optimalni sistem (Slika 1), tj.:

$$\dot{z}(t_f, \alpha_1)_{opt.} \tag{6}$$

ukoliko se ne traži apsolutni ekstrem u okviru ograničenja.

Traganje za ekstremumom je u principu moguće izvesti numerički uz pomoć pogodnog algoritma za računar, ukoliko to dopuštaju vreme i troškovi izračunavanja, a kao rezultat se dobijaju numeričke vrednosti p-tog (optimalnog) sistema:

$$\{\alpha\}_p^{opt} = \{\alpha_1\ \alpha_2 \ldots \alpha_n\}_p^{T\ opt}, \tag{7}$$

što je dovoljno da se izvrši fizičko oblikovanje sistema.

Uticaj pojedinih konstrukcionih parametara na vrednost indeksa performansi (5) ostao je medjutim najčešće skriven, ili je potrebno da se izvrši veliki broj istraživanja da bi se ovaj uticaj definisao u ograničenom prostoru, i rasčlanile interakcione veze.

Od interesa je stoga da se utvrdi analitički izraz za površinu odziva sistema, makar i u granicama tačnosti prihvatljivih za inženjersku praksu.

4. Formiranje analitičkog izraza - Formiranje analitičkog izraza optabilne površine (Slika 1) odziva, izvršeno je uz pomoć jednačine regresije (1) po metodologiji potpunog faktornog eksperimenta.

Vektor parametara sistema $\{\alpha\}$ smatran je kao ulazna veličina koja u okviru definisanog vektora ograničenja (4) dovodi do promene odziva, izlaza, i promene vrednosti $J = L(\alpha)$.

U cilju zadržavanja uobičajene notacije izvršeno je označavanje:

$$\{\alpha_i\}_1^n = \{x_i\}_1^n \tag{8}$$

Ulazne promenjive su prema tome faktori čija se promena vrši na dva nivoa, te je potreban broj eksperimenta, u ovom slučaju izračunavanja 2^n. Oblik jednačine je sledeći:

Potpuni faktorni eksperiment:

$$\dot{z}(t_f) = b_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2 + \ldots + b_n X_n + b_{12} X_1 X_2 + \ldots + b_{(n-1)n} X_{n-1} X_n , \tag{9}$$

Jednačina (9) je prikazana u kodiranim koordinatama (1), posle izvršene transformacije fizičkih oznaka u kodirane veličine.

U primeru ovog rada, koji se odnosi na jedan realni mašinski sistem, prikazana je jednačina (9) i rezultati izračunavanja. Jednačina je na kraju transformisana u osnovne fizičke parametre, i izvršeno je poredjenje dobivenih rezultata sa rezultatima koji mogu da se nadju u literaturi [2,3].

5. Primer - Izvedena procedura formiranja jednačine površine sprovedena je na primeru mašinskog sistema za koji je izradjen računarski algoritam za numeričko izračunavanje jednačina (1).

Matematički model dinamičkog ponašanja sistema opisan je diferencijalnim jednačinama datim u normalnom obliku:

$$\dot{z} = \begin{Bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} z_2 \\ (k_1 - k_2 . z_1 + k_3 . u_1(t))^{-\gamma} + (k_4 + k_5 . z_1 - k_6 . u_2(t))^{-\gamma} + k_7 \end{bmatrix},$$

$$t_1 = w^{-1} \mathrm{arc\ cos}\ k_o \ ,$$

$$u_1(t) = \begin{Bmatrix} o.9 & , \forall t (t \in T)(t \leq t_1) \\ \cos wt & , \forall t (t \in T)(t > t_1) \\ o.9 & , \forall t (t \in T)((2\pi/w - t_1) < t < 2\pi/w) \end{Bmatrix},$$

$$u_2(t) = \begin{Bmatrix} \cos wt & , \forall t (w^{-1} \mathrm{arc\ cos}\ k_o \leq t < w^{-1}(\pi - \mathrm{arc\ cos}\ k_o) \\ k_8 . t & , \forall t (\pi < t \geq w^{-1}(\pi - \mathrm{arc\ cos}\ k_o)) \\ k_9 . z^{-\gamma} & , \forall z (z \in Z)(o < z \leq C_a \wedge \dot{z} < o) \\ o.9 & , \forall t ((t_1 \leq \mathrm{arc\ cos}\ k_o) \wedge ((2\pi/w - t_1 < t < 2\pi/w)) \end{Bmatrix}.$$

$$k_4 = \begin{Bmatrix} o & , t \leq t_1 \\ >o & , t_1 < t \leq (2\pi/w - t_1) \\ o & , \forall z (o < z < C_a \wedge \dot{z} < o) \end{Bmatrix},$$

$$k_5 = \begin{Bmatrix} o & , \begin{cases} t \leq t_1 \\ z < C_a \end{cases} \\ >o & , \begin{cases} t_1 < t \leq (\pi/w - t_1) \\ z (z \geq C_a) \end{cases} \end{Bmatrix}$$

k_i $(i = 1,2..7)$ konstante jednog izabranog sistema

Usvojena centralna tačka izračunavanja na površini odziva ima sledeće vrednosti:

Faktor	A_2	A_4	A_5	H
Oznaka	X_1	X_2	X_3	X_4
Vrednost	8o7	855	285	48
Interval	98	1o1	6o	2

(10)

Vrednost odziva u centru 439 cm/s

Usvojeni primer je četvorofaktorni te je potrebno da se obavi $2^4 = 16$ izračunavanja, da bi se dobila jednačina površine potpunog faktornog metoda.

Vrednosti odziva ($\hat{z}$) dobivene izračunavanjem, date su u tablici (Slika 2) za slučaj potpunog faktornog eksperimenta, uporedo sa vrednostima dobivenih jednačinom višeg reda.

Izračunavanje koeficijenata jednačina regresije izvršeno je uobičajenim postupkom [1, 4] .

Slika 2 - Matrica izračunavanja 2^4 faktornog postupka

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Broj eksp. N	x_1	x_2	x_3	x_4	A_2	A_4	A_6	H	Odziv algor. račun.	Jed- nač. (10)
1	-1	-1	-1	-1	706	754	224	46	449,5	418,2
2	+1	-1	-1	-1	908	754	224	46	413	431,8
3	-1	+1	-1	-1	706	957	224	46	443,9	446,2
4	+1	+1	-1	-1	908	959	224	46	396	416,4
5	-1	-1	+1	-1	706	754	346	46	377	400,4
6	+1	-1	+1	-1	908	754	346	46	446	414
7	-1	+1	+1	-1	706	959	346	46	441	456,8
8	+1	+1	+1	-1	908	959	346	46	423,5	424,2
9	-1	-1	-1	+1	706	754	224	50	377,7	403
10	+1	-1	-1	+1	908	754	224	50	419	416,1
11	-1	+1	-1	+1	706	954	224	50	437	431
12	+1	+1	-1	+1	908	957	224	50	408	401,4
13	-1	-1	+1	+1	706	754	346	50	415	408
14	+1	-1	+1	+1	908	754	346	50	395	400
15	-1	+1	+1	+1	706	959	346	50	466	464,4
16	+1	+1	+1	+1	908	957	346	50	442	434,8
									Σ 6749,4	

6. Analiza dobivenih rezultata - Na osnovu dobivenih vrednosti odziva numeričkim izračunavanjem koji su pretstavljeni u koloni (9) slike 2, izvršena su izračunavanja koeficijenata jednačina regresije i formirana jednačina (11) i (12):

$$\dot{z}(t_f) = 421{,}5-4X_1+10.3X_2+3.9X_3-1.9X_4-10.8X_1X_2+7.1X_2X_3-5.7X_3X_4 \qquad (11)$$

ili u fizičkim parametrima:

$$\dot{z}(t_f)=607+0.82A_2+0.62A_4-3.1A_5-14.6H-0.001A_2A_4+0.001A_4A_5+0.65A_5H \qquad (12)$$

Maksimalna vrednost odziva dobija se analizom jednačine (11). Efekti prvog reda ukazuju na interakcione veze izmedju parametara sistema i na zavisnost promene jednog faktora od promene drugog. Ove interakcije primećene i pri jednofaktornom ispitivanju sistema pomoću računarskog algoritma, ali veze nisu mogle da budu ustanovljene numeričkim izračunavanjima. Iz jednačine (11) proizilazi da veza:

$$b_{12}\, X_1X_2 = -10{,}8\; X_1X_2 \qquad (13)$$

dovodi do porasta brzine odziva samo ako je proizvod X_1X_2 manji od nule, tj. ako je ispunjen uslov:

$$((X_1 > 0 \wedge X_2 < 0) \vee (X_1 < 0 \wedge X_2 > 0)) \rightarrow b_{12}X_1X_2 > 0 \qquad (14)$$

Iz linearnog dela jednačine (11) proizilazi:

$$\forall X_1\ \forall X_2\quad (X_2 \rightarrow -1 \wedge X_2 \rightarrow 1 \Rightarrow \dot{z}(t_f)\ \text{raste}) \qquad (15)$$

Drugi efekat $b_{23}X_2X_3 = 7{,}1\ X_2X_3$ ukazuje da faktori X_2 i X_3 treba da budu istog znaka da bi proizvod bio pozitivan. Kako je iz (15) $X_2 > 0$ to proizilazi da i X_3 mora da bude veći od nule. Ovaj zahtev je u saglasnosti sa efektom $b_3X_3 = 3{,}9\ X_3$ koji takodje za $X_3 > 0$ daje porast vrednosti odziva.

Treći efekat $b_{34}\ X_3X_4 = 5{,}7\ X_3X_4$ utiče na porast odziva samo ako su članovi istog znaka. Kako je $X_3 > 0$ to proizilazi da treba da bude i $X_4 > 0$. Član $b_4X_4 = -1{,}9X_4$ medjutim uslovljava negativan znak za faktor X_4 što je u suprotnosti sa prethodnim zaključkom. Efekat trećeg interakcionog člana je medjutim veći pa je stoga vrednost odziva veća za slučaj $X_4 > 0$.

Prema tome na osnovu analize jednačine (11) proizilazi da:

$$(X_1 = -1 \wedge X_2 = 1 \wedge X_3 = 1 \wedge X_4 = 1 \wedge X_i \in M(X_i)) \Rightarrow \dot{z}(t_f) \text{ max.} \qquad (16)$$

U literaturi [2,3, 4] nalaze se odnosi glavnih faktora kao preporuke kod izvodjenja realnog sistema. Ovi odnosi dovode do izrade sistema različitih vrednosti odziva kao i ukupnih dimenzija, a provera jednačinom (11) pokazuje da se optimalni sistem odseca ovim relacijama i ne nalazi unutar njih.

Relacije [2,3] , u svakom slučaju daju najvišu vrednost odziva u okviru svojih ograničenja ako se za najvišu vrednost faktora $x_1 = A_2$ ostali faktori drže na gornjim granicama koje relacije dopuštaju, ali optimalni sistem po brzini udara i, prema tome, po kinetičkoj energiji, kao i po opštim dimenzijama nije ostvaren. Primena jednačine (11) u okviru prostora ograničenja za koji važi, dopušta brzu i laku proveru u fazi konstruisanja.

7. Zaključak - U izvesnim slučajevima upravljanog mašinskog sistema pretstavljenog nelinearnim modelom, sa definisanom tačkom cilja, interakcioni efekti izmedju parametara sistema otežavaju analizu njihovih uticaja, zbog teškoća oko razdvajanja ovih uticaja. Upotrebljen je stoga postupak primenjen kod planiranja potpunog faktornog eksperimenta da bi se formirao jednostavan algoritam zavisnosti vrednosti izabranog odziva u tački cilja od vrednosti osnovnih konstrukcionih parametara, koje je najčešće nemoguće razdvojiti kroz modelske parametre. Izraz je pogodan za ocenu efekta pojedinih i združenih parametara, a istovremeno može da posluži i za analizu rezultata dobivenih primenom inženjerskih relacija koji se nalaze u literaturi, primenjivih u fazi pri približavanja optimalnom rešenju, a u okviru ograničenja

Primenjenim četvorofaktornim postupkom uzet je u obzir samo uticaj glavnih parametara, dok je dejstvo ostalih ostalo skriveno i izmešano. Kako broj izračunavanja raste sa brojem ulaza to se uticaj ostalih parametara može da oceni primenom parcijalnog postupka.

L i t e r a t u r a:

1. Vinarskij M.S., Lurje M.V.,
Planirovanije eksperimetna v tehnologičeskih issledovanijah, "Tehnika", Kiev, 1975.
2. Stanković, P. : Mašine alatke (1971).
3. Mašinostroenije: Tom 8.
4. Stanić, I. : Metod inženjerskih merenja (1975).

Concluzions

On the separations of the influence of variables on sistem output value.

In this paper, the positibility for generating thepapproxsimative algoritam for the calculation of the sistem output value was shown. The multyparametar non-autonomaus dynamic sistem was previously solved by numerical mehtods. As the interactions and influences among the sistem parametars werw not clear, the suitable algoritam whieh separate influence of the parametars was developed using surface metodology. The simple linear algoritam enables of the influence of each parametar and its interactions.